A-H Clasa a XII-a

Barem de corectare și notare

Subiectul 1

a) $x*y=x^2y^2-4x^2-4y^2+16+4=\left(x^2-4\right)\left(y^2-4\right)+4=$	**2p**
$=(x-2)(x+2)(y-2)(y+2)+4$	**1p**
b) Din $x*y=\left(x^2-4\right)\left(y^2-4\right)+4 \Rightarrow x*x*x*x*x=\left(x^2-4\right)^5+4$	**1p**
$\left(x^2-4\right)^5+4=5 \Rightarrow \left(x^2-4\right)^5=1 \Rightarrow x^2-4=1 \Rightarrow x^2=5 \Rightarrow x=\pm\sqrt{5}\ x^2=5 \Rightarrow x=\pm\sqrt{5}$	**1p**
c) Avem $x*(-2)=2*y=4, \forall x,y\in\mathbb{R}$	**1p**
Pentru $x=(-200)*(-199)*...*(-3)$ și $y=3*4*...*200$ se obține identitatea din enunț.	**1p**

Subiectul 2

a) (L) $A(m)A(n)=\begin{pmatrix}1 & m\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & m+n\\ 0 & 1\end{pmatrix}=A(m+n),\ m,n\in\mathbb{Z}$.	**1p**
Înmulțirea matricelor este întotdeauna asociativă, în general și comutativă, în particular.	**1p**
(N) $\exists A(e)\in G$, $A(a)A(e)=A(a), \forall A(a)\in G \Rightarrow A(a+e)=A(a) \Leftrightarrow a+e=a, \forall a\in\mathbb{Z} \Rightarrow e=0 \Rightarrow A(0)=I_2\in G$	**1p**
(S) $A(n)\in G$, deci $\det A(n)=1 \Rightarrow A(n)$ inversabilă $A(n)A(n')=A(0) \Rightarrow n+n'=0 \Rightarrow n'=-n\in\mathbb{Z} \Rightarrow A(n')=A(-n)\in G$ $(G,\bullet)$ grup abelian	**1p**
b) Definim $f:\mathbb{Z}\to G,\ f(m)=A(m)$.	**1p**
$f(m)=f(n) \Rightarrow A(m)=A(n) \Rightarrow m=n$, deci *f* este injectivă $\forall A(m)\in G, \exists m\in\mathbb{Z}$ pentru care $f(m)=A(m)$, deci *f* este surjectivă: Deci *f* este bijectivă.	**1p**
$f(m+n)=A(m+n)=A(m)A(n)=f(m)f(n)$. In concluzie *f* este izomorfism de grupuri.	**1p**

Subiectul 3

a) Fie $h(t)=\int_0^t v(x)dx=0,01\frac{x^2}{2}\Big\vert_0^t+0,1x\Big\vert_0^t=0,01\frac{t^2}{2}+0,1t$ cu $h(0)=0$	**2p**
$h(60)=24\,\text{m}$	**2p**
b) $h(t)=\int_0^t v(x)dx=12 \Rightarrow 0,01\frac{t^2}{2}+0,1t=12 \Rightarrow t=40$ ani	**3p**

Subiectul 4

a) $F'(x)=f(x) \Rightarrow \left[x^2+(a+2)x+a+b\right]e^x=\left(x^2+x\right)e^x \Rightarrow a=-1$ și $b=1$	**2p**
b) Pentru $a=-1$ și $b=1 \Rightarrow F(x)=\left(x^2-x+1\right)e^x$	**1p**
$F'(x)=f(x) \Rightarrow \int_0^1 f(x)F(x)dx=\int_0^1 F'(x)F(x)dx=\frac{F^2(x)}{2}\Big\vert_0^1=\frac{e^2-1}{2}$	**2p**
c) $\int_0^{m^2}\frac{F(x)+f(x)}{2x^2+1}dx=\int_0^{m^2}e^x dx=e^{m^2}-1$	**1p**
$e^{m^2}-1=e^{2025}-1 \Rightarrow m=\pm 45, m>0 \Rightarrow m=45$	**1p**